

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord 27 mai 2011

EXERCICE 1

5 points

Partie A

1. Pour tout point M du plan d'affixe z , son image M' par r_A a une affixe z' définie par : $z' - i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - i)$ ou encore : $z' - i = i(z - i) \iff z' = i + iz + 1 \iff z' = iz + 1 + i$.

D'étant l'image de C par r_A , on a donc :

$$d = i(3i) + 1 + i = -3 + 1 + i = -2 + i.$$

2. De même, pour tout point M du plan d'affixe z , son image M' par r_B a une affixe z' définie par : $z' - (1 + i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 - i) \iff z' = 1 + i + i(z - 1 - i) \iff z' = 1 + i + iz - i + 1 \iff z' = iz + 2$.

$$\text{Donc } g = i(-2 + i) + 2 = -2i - 1 + 2 = 1 - 2i.$$

Enfin pour tout point M du plan d'affixe z , son image M' par r_O a une affixe z' définie par : $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z = -iz$.

$$\text{Donc } h = -i(3i) = 3.$$

3. On a $d - c = -2 + i - 3i = -2 - 2i$ et

$$g - h = 1 - 2i - 3 = -2 - 2i.$$

Or $d - c = g - h \iff \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HG} \iff CDGH$ est un parallélogramme.

De plus $g - c = 1 - 2i - 3i = 1 - 5i$, donc $CG^2 = 1 + 25 = 26$ et

$$h - d = 3 - (-2 + i) = 5 + i, \text{ donc } DH^2 = 25 + 1 = 26.$$

On a donc $CG^2 = DH^2 \iff CG = DH$.

Conclusion : le parallélogramme $CDGH$ a ses diagonales de même longueur : c'est un rectangle.

Partie B

1. En reprenant les définitions des rotations trouvées dans la partie A, on a :

$$n = im + 1 + i.$$

De même : $p = in + 2 = i(im + 1 + i) + 2 = -m + i - 1 + 2 = -m + 1 + i$.

Enfin $q = -im$.

2. D'une part : $n - m = im + 1 + i - m = m(i - 1) + 1 + i$, d'autre part :

$$p - q = -m + 1 + i - (-im) = m(i - 1) + 1 + i.$$

Donc $n - m = p - q \iff MNPQ$ est un parallélogramme

3. a.
$$\frac{m - n}{p - n} = \frac{m - (im + 1 + i)}{-m + 1 + i - (im + 1 + i)} = \frac{m(1 - i) - 1 - i}{m(-i - 1)} = \frac{[m(1 - i) - 1 - i](-1 + i)}{m(-i - 1)(i - 1)} = \frac{2mi + 2}{2m} = \frac{mi + 1}{m} = i + \frac{1}{m} \text{ (car } M \neq O \Rightarrow m \neq 0).$$

- b. $MNPQ$ est un rectangle si et seulement si $(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \frac{m - n}{p - n}$ est un imaginaire pur.

Donc comme $i + \frac{1}{m}$ ne peut être un imaginaire que si $\frac{1}{m}$ est un imaginaire, c'est-à-dire si m est un imaginaire, $MNPQ$ est un rectangle si et seulement si $m = ai$, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$, puisque M ne peut être ni O ni en A .

EXERCICE 2

4 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Puisque tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis la probabilité est égale à :

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!}}{25! \times 23!} = \frac{3}{25 \times 12} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Partie B

1. On a $p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5)$. Donc :

$$p(X > 5) = 0,4 \iff 1 - p(X \leq 5) = 0,4 \iff 0,6 = p(X \leq 5) \iff 0,6 = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx \iff 0,6 = [-e^{-\lambda x}]_0^5 \iff 0,6 = -e^{-5\lambda} + 1 \iff e^{-5\lambda} = 0,4 \iff$$

(par croissance de la fonction logarithme népérien) $-5\lambda = \ln 0,4 \iff \lambda = \frac{\ln 0,4}{-5}$.

Or $\frac{\ln 0,4}{-5} \approx 0,183$ à 10^{-3} près.

2. Il faut calculer : $p_{(X>3)}(X > 5) = \frac{p(X > 5)}{p(X > 3)} = \frac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-2\lambda} = e^{-0,36} \approx 0,698$.

3. a. On fait 10 fois le même tirage de façon indépendante. On a donc une loi binomiale de paramètre 10 et 0,4. La probabilité cherché est donc le complément à 1 de la probabilité de n'avoir aucun ordinateur en état de marche soit :

$$1 - (0,6)^{10} \approx 0,994 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

- b. Avec n ordinateurs on a à résoudre l'inéquation :

$$1 - 0,6^n \geq 0,999 \iff 0,001 \geq 0,6^n \iff \ln 0,001 \geq n \ln 0,6 \iff$$

$$n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,6}. \text{ Or } \frac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \approx 13,5.$$

Le nombre minimal est donc 14 ordinateurs.

EXERCICE 3**5 points****Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Comme $a + b + c \neq 0$ le barycentre G de A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c et vérifie :

$a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$. On a donc grâce à la relation de Chasles :

$$\|a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}\| = k \iff \|a\vec{MG} + a\vec{GA} + b\vec{MG} + b\vec{GB} + c\vec{MG} + c\vec{GC}\| =$$

$$k \iff \left\| \underbrace{a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC}}_{=\vec{0}} + (a+b+c)\vec{MG} \right\| = k \iff |a+b+c| \|\vec{MG}\| = k \iff$$

$$GM = \frac{k}{|a+b+c|}.$$

Cette dernière égalité montre que tous les points M sont à la distance $\frac{k}{|a+b+c|}$ du

point G, donc appartiennent à la sphère de centre G et de rayon $\frac{k}{|a+b+c|}$.

Partie B

1. On a $\vec{BC}(0; 1; 0)$, $\vec{BE}(-1; 0; 1)$ d'où $\vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 + 0 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{BE} = 0 + 0 + 0 = 0$.

Comme \vec{BC} et \vec{BE} ne sont pas colinéaires, on déduit que le vecteur \vec{n} est normal au plan (BCE).

$$2. M(x; y; z) \in (\text{BCE}) \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \iff 1(x-1) + 0(y-1) + 1(z-0) = 0 \iff x + z - 1 = 0.$$

3. La droite (Δ) étant perpendiculaire au plan (BCE) admet pour vecteur directeur \vec{n} et contient E.

Une des équations paramétriques est donc :

$$M(x; y; z) \in (\Delta) \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 0t \\ z = 1 + t \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Le plan (ABC) a pour équation $z = 0$. Un point est commun à (Δ) et à (ABC) si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ -1 = t \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ -1 = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Il y a donc un seul point commun le point R de coordonnées $(-1; 0; 0)$.

Or le milieu de [BR] a pour coordonnées $\left(\frac{1-1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = (0; 0; 0)$: c'est le point A. Donc R est le symétrique de B par rapport à A.

5. a. Soit G le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2 : ce barycentre existe puisque $1 - 1 + 2 \neq 0$ et vérifie donc par définition :

$$-\overrightarrow{GR} - 1\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Les coordonnées de G sont donc :

$$x_G = \frac{1x_R - x_B + 2x_C}{2} = 0;$$

$$y_G = \frac{1y_R - y_B + 2y_C}{2} = 1;$$

$$z_G = \frac{1z_R - z_B + 2z_C}{2} = 0.$$

Ces coordonnées sont en fait celles du point D.

- b. Comme D est le barycentre de R, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2, on a donc par définition :

$$1\overrightarrow{DR} - 1\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}.$$

En utilisant la relation de Chasles :

$$\|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2} \iff \|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DR} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{DC}\| = 2\sqrt{2} \iff \|\underbrace{\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MD}\| = 2\sqrt{2} \iff \|2\overrightarrow{MD}\| =$$

$$2\sqrt{2} \iff DM = \sqrt{2} : \text{les points } M \text{ appartiennent donc à la sphère de centre D et de rayon } \sqrt{2}.$$

Rem. : on aurait utilisé directement le résultat de la R. O. C.

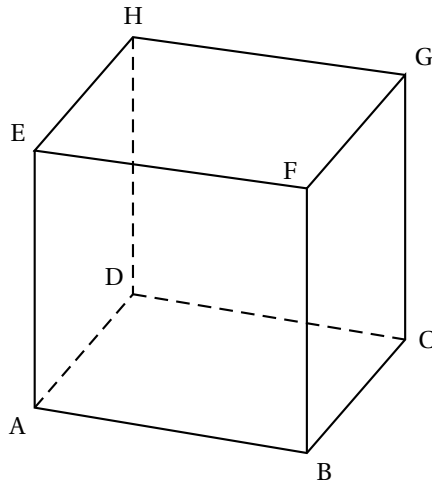
- c. On a $DB^2 = 1 + 1 = 2$, $DE^2 = 1 + 1 = 2$ et $DG^2 = 1 + 1 = 2$, d'où $DB = DE = DG = \sqrt{2}$, ce qui démontre que B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

- d. Calculons la distance du centre de la sphère au plan (BCE) :

$d(D, (\text{BCE})) = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}$. Cette distance étant inférieure au rayon de la sphère, ceci démontre que (S) et (BCE) sont sécants selon un cercle, dont le centre est le projeté orthogonal de D sur le plan (BCE) et son rayon r vérifie l'égalité de Pythagore

$$r^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 \iff r^2 + \frac{1}{2} = 2 \iff r^2 = \frac{3}{2} \iff r = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$



EXERCICE 3
Enseignement de spécialité

5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soient a , b et c trois entiers non nuls ; supposons que a divise le produit bc et que a et b soient premiers entre eux.

Il existe donc un entier k tel que $bc = ka$. D'autre part puisque a et b soient premiers entre eux, il existe d'après le théorème de Bezout deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$ ou en multipliant par c non nul :

$acu + bcv = c$ et en remplaçant bc par ka :

$acu + kav = c \iff a(cu + kv) = c$.

Cette égalité montre que a divise c .

Partie B

- On calcule : $u_1 = 2 + 3 + 6 - 1 = 10$;
 $u_2 = 4 + 9 + 36 - 1 = 48$;
 $u_3 = 8 + 27 + 216 - 1 = 250$;
 $u_4 = 16 + 81 + 1296 - 1 = 1392$;
 $u_5 = 32 + 243 + 7776 - 1 = 8050$;
 $u_6 = 64 + 729 + 46656 - 1 = 47448$.
- On a : $2 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 2^n \equiv 0 \pmod{2}$;
 $3 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 3^n \equiv 1 \pmod{2}$;
 $6 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 6^n \equiv 0 \pmod{2}$.
 Donc $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0 \pmod{2}$
 u_n est donc pair.
 Ou encore 2^n et 6^n sont pairs ; 3^n et 1 sont impairs, donc leur différence est paire et par somme u_n est pair.
- n est pair : il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$.
 On peut donc écrire : $u_n = u_{2k} = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 = 4^k + 9^k + 2^{2k} \times 3^{2k} - 1 = 4^k + 4^k \times 9^k + 9^k - 1$.
 Comme $4 \equiv 0 \pmod{4}$, $4^k \equiv 0 \pmod{4}$;
 $4^k \times 9^k \equiv 0 \pmod{4}$;
 $9 \equiv 1 \pmod{4}$, donc $9^k \equiv 1 \pmod{4}$, d'où par somme :
 $u_{2k} \equiv 0 + 0 + 1 - 1 = 0 \pmod{4}$, c'est-à-dire que u_{2k} est un multiple de 4.

4. On a vu que 2 divise u_1 , que 3 divise u_2 , que 5 divise u_3 et 7 divise u_5 .
Donc 2, 3, 5 et 7 appartiennent à l'ensemble (E)
5. **a.** D'après le théorème de Fermat, 2 étant premier avec p , on a $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
Donc $6 \times 2^{p-2} = 3 \times 2^{p-1} \equiv 3 \pmod{p}$.
D'autre part 3 étant premier avec p , $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
Donc $6 \times 3^{p-2} = 2 \times 3^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$.
- b.** Par définition : $6u_{p-2} = 6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) =$
 $6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$.
On a vu que $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$, que $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$ et on a $6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ car p premier avec 2 et 3 est premier avec 6.
Donc $6 \times u_{p-2} \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \pmod{p}$ soit $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.
- c.** On vient de démontrer que $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$: donc p divise $6 \times u_{p-2}$, mais p et 6 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss p divise u_{p-2} .
Conclusion : tout entier p premier appartient à l'ensemble (E)

EXERCICE 4

6 points

Partie A

1. g somme de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
 $g'(x) = e^x - 1$.
 $g'(0) = 0$ et pour tout réel $x \in [0 ; +\infty[$, $g'(x) \geq 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle ($x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 > 1$).
Conclusion : $g'(x) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$, la dérivée ne s'annulant qu'en 0 donc la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
2. On a $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
La fonction étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a, quel que soit x , $g(x) \geq g(0)$, donc $g(x) \geq 0$.
3. On vient de démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[0 ; +\infty[$,
 $g(x) \geq 0 \iff e^x - x - 1 \geq 0 \iff e^x - x \geq 1$.

Partie B

1. On a $f(0) = \frac{1-1}{1} = 0$ et $f(1) = \frac{e-1}{e-1} = 1$.
Comme la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$
 $f(0) \leq f(x) \leq f(1) \iff 0 \leq f(x) \leq 1$.
2. **a.** $f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} =$
 $\frac{e^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{e^x - x} = \frac{e^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{e^x - x} = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x} =$
 $\frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
- b.** La position relative de la droite (D) et de la courbe (\mathcal{C}) sur $[0 ; 1]$ est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur $[0 ; 1]$, $g(x) \geq 0$ et $e^x - x \geq 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geq 0$, ce qui signifie que la courbe (\mathcal{C}) est au dessus de la droite (D).

3. a. En posant : $u(x) = e^x - x$, u est dérivable sur $[0; 1]$ et $u'(x) = e^x - 1$, donc $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On reconnaît la dérivée de la fonction $\ln|u(x)|$, mais comme on a vu que $u(x) = e^x - x \geq 1 > 0$, $|u(x)| = u(x)$.

Conclusion : une primitive sur $[0; 1]$ de f est la fonction F définie par $F(x) = \ln(e^x - x)$.

- b. On a vu que sur $[0; 1]$, la courbe (\mathcal{C}) est au dessus de la droite (D), donc l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (\mathcal{C}), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$$\int_0^1 [f(x) - x] dx \left[F(x) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = F(1) - \frac{1}{2} - F(0) = \ln(e^1 - 1) - \frac{1}{2} - [\ln(e^0 - 0)] = \ln(e - 1) - \frac{1}{2}. \text{ (u. a.)}$$

Partie C

1. Voir plus bas.

2. *Initialisation* : $u_0 = \frac{1}{2}$ et on a vu (question 2. b.) que sur $[0; 1]$ $f(x) - x \geq 0$, soit avec $x = u_0$, $f(u_0) - u_0 \geq 0 \iff u_1 - u_0 \geq 0 \iff u_1 \geq u_0$.

On a donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

Hérédité : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$\frac{1}{2} \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 1$ par croissance de la fonction f sur $[0; 1]$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_p) \leq f(u_{p+1}) \leq f(1) \iff u_1 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 1$$

et comme $u_1 > u_0 = \frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{2} \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

3. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et elle est majorée par 1.

Elle converge donc vers un réel $\ell \leq 1$.

Or f est continue, donc comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient par continuité $\ell = f(\ell)$ qui a pour solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ le nombre 1.

Conclusion $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

ANNEXE

EXERCICE 4

